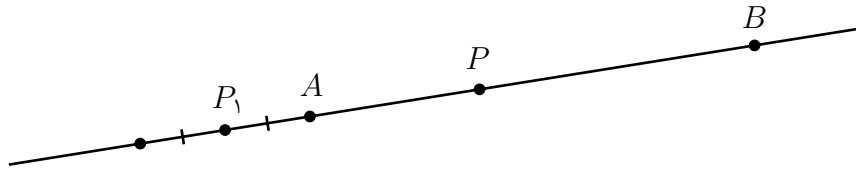


۱. روی خطی دو نقطه‌ی متمایز A و B قرار دارند. یکی از نقاط روی پاره‌خط AB ، به غیر از نقاط A ، B و وسط پاره‌خط AB ، را قرمز می‌کنیم. در هر مرحله یک نقطه‌ی قرمز را نسبت به یکی از نقاط A و B قرینه می‌کنیم، سپس فاصله‌ی نقطه‌ی جدید تا همان نقطه را نصف می‌کنیم و نقطه‌ی حاصل را قرمز می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر اگر P یک نقطه‌ی قرمز باشد می‌توانیم P را نسبت به A قرینه کنیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی حاصل تا A را نصف کنیم تا به نقطه‌ی P_1 برسیم و آن را قرمز کنیم.



آیا ممکن است پس از متناهی مرحله نقطه‌ی وسط AB قرمز شود؟

راه حل.

خط داده شده را محور اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم به طوری که A منطبق بر صفر و B منطبق بر ۲ باشد. فرض کنید پس از متناهی مرحله نقطه‌ی ۱ قرمز شود. دقت کنید عمل عکس عمل تعریف شده در صورت مسئله به این شکل است: یکی از دو نقطه‌ی A و B را نسبت به یکی از نقاط قرمز قرینه می‌کنیم، سپس نقطه‌ی حاصل را نسبت به همان نقطه قرینه می‌کنیم. نقطه‌ی حاصل نیز باید یک نقطه‌ی قرمز باشد. پس اگر نقطه‌ی x قرمز شده باشد طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل باید یکی از نقاط $-2x$ و $6-2x$ قرمز شده باشند. از آنجا که ۱ قرمز شده است در مرحله‌ی قبل یکی از نقاط -2 و 4 قرمز شده‌اند. حال نشان می‌دهیم اگر نقطه‌ی $x_1 \in (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$ قرمز باشد نقاطی که در مراحل قبل از آن قرمز شده‌اند نیز همه باید در همین بازه قرار داشته باشند. طبق عمل عکس، در مرحله‌ی قبل از قرمز شدن x_1 یکی از دو نقطه‌ی $-2x_1$ و $6-2x_1$ قرمز شده‌اند. حال دقت کنید که

$$-2 \leq 6 - 2x_1 \text{ یا } 10 \leq 6 - 2x_1 \quad \text{و} \quad -2x_1 \leq -8 \text{ یا } 4 \leq -2x_1$$

پس $-2x_1$ و $6-2x_1$ نیز هر دو در بازه‌ی $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$ قرار دارند. در نتیجه هیچ‌گاه نمی‌توانیم از این بازه خارج شویم که با انتخاب اولین نقطه‌ی قرمز در تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و نقطه‌ی وسط AB پس از متناهی مرحله نمی‌تواند قرمز شود.

۲. عدد طبیعی n را خوب می نامیم اگر رقم صفر نداشته باشد و بتوانیم یکی از ارقامش را حذف کنیم به طوری که عدد حاصل مقسوم علیه n شود. برای مثال ۲۵ یک عدد خوب است زیرا اگر رقم ۲ را حذف کنیم عدد حاصل برابر با ۵ می شود که مقسوم علیه ۲۵ است. ثابت کنید تعداد اعداد خوب متناهی است.

راه حل.

فرض کنید n یک عدد خوب باشد. ارقام عدد طبیعی n را به شکل \overline{abc} نشان می دهیم که b تنها یک رقم است که با حذف آن به یک مقسوم علیه n می رسیم اما a و c ممکن است از چند رقم تشکیل شده باشند. ابتدا حالتی را بررسی می کنیم که $a \neq 0$. همچنین فرض کنید b از سمت راست رقم t ام n باشد. پس در واقع داریم $n = 10^t a + 10^{t-1} b + c$ و اگر رقم b را حذف کنیم به عدد $10^{t-1} a + c$ می رسیم. در نتیجه

$$\left. \begin{array}{l} 10^{t-1} a + c \mid 10^t a + 10^{t-1} b + c \\ 10^{t-1} a + c \mid 10^t a + 10c \end{array} \right\} \implies 10^{t-1} a + c \mid 10^{t-1} b - 9c$$

دقت کنید که $|10^{t-1} b - 9c|$ حداکثر t رقم دارد. حال اگر a حداقل دو رقم داشته باشد، $10^{t-1} a + c$ حداقل $t+1$ رقم دارد پس تنها حالت ممکن این است که $10^{t-1} b - 9c$ برابر با صفر باشد. این نیز نتیجه می دهد $c \mid 10^{t-1}$ که امکان ندارد زیرا $c < 10^{t-1}$. در نتیجه a باید یک رقم داشته باشد. توجه کنید که

$$20(10^{t-1} a + c) = 2 \times 10^t a + 20c > 10^t a + 10^{t-1} b + c$$

پس اگر قرار دهیم $10^t a + 10^{t-1} b + c = k(10^{t-1} a + c)$ نتیجه می شود $k < 20$. از طرف دیگر می توان نوشت

$$10^{t-1}((10-k)a + b) = c(k-1) \implies 10^{t-1} \mid c(k-1)$$

از آنجا که n رقم صفر ندارد c نسبت به حداقل یکی از دو عدد 2^{t-1} و 5^{t-1} اول است. اگر $(c, 2^{t-1}) = 1$ آنگاه طبق لم اقلیدس نتیجه می شود

$$2^{t-1} \mid k-1 \implies 2^{t-1} \leq k-1 < 19 \implies t \leq 5$$

حالتی که $(c, 5^{t-1}) = 1$ نیز به طور مشابه نتیجه می دهد $t \leq 2$ پس n حداکثر ۶ رقمی است. حال به سراغ حالت $a = 0$ می رویم. در این حالت داریم $n = 10^{t-1} b + c$ و با حذف b به عدد c می رسیم. در نتیجه

$$c \mid 10^{t-1} b + c \implies c \mid 10^{t-1} b$$

مشابه قبل دو حالت برای c داریم. اگر $(c, 2^{t-1}) = 1$ طبق لم اقلیدس نتیجه می شود

$$c \mid 5^{t-1} b \implies 10^{t-2} \leq c \leq 5^{t-1} b \leq 5^{t-1} \times 9 \implies 2^{t-2} \leq 45 \implies t \leq 7$$

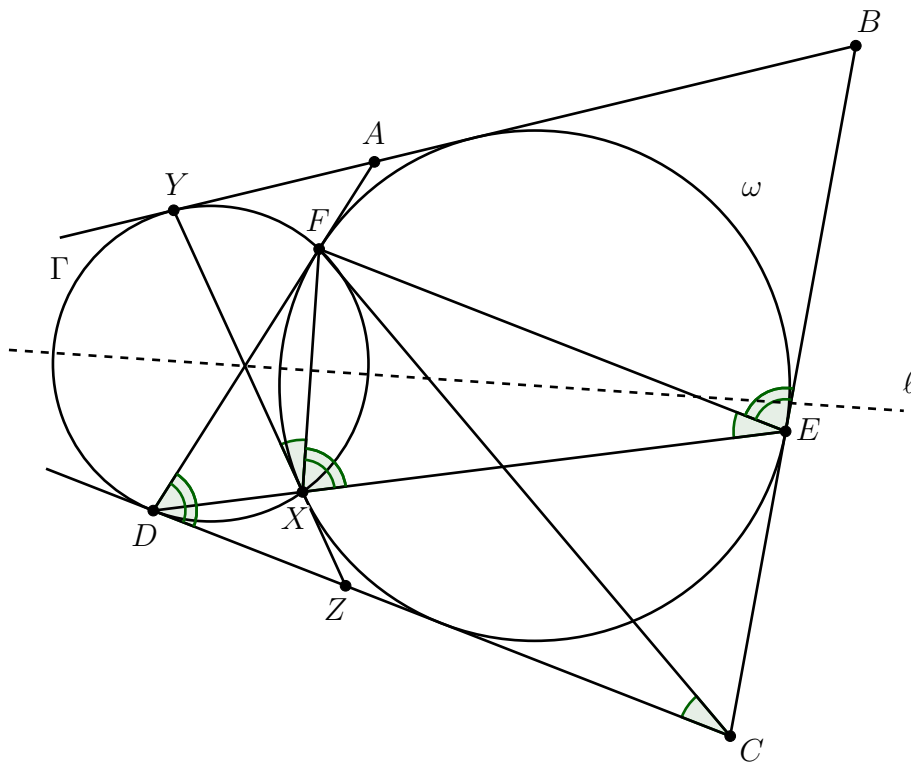
سوالات و راه حل‌های مرحله دوم سی و نهمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۴۰۰

برای حالت $(c, 5^{t-1}) = 1$ نیز مشابهاً نتیجه می‌شود $t \leq 3$ پس n حداکثر ۷ رقم دارد و تعداد اعداد خوب متناهی است.

۳. چهارضلعی محیطی $ABCD$ با دایره محاطی ω مفروض است. ω در نقاط F و E بر AD و BC مماس است و DE برای بار دوم ω را در X قطع می‌کند. اگر دایره محیطی مثلث DXF بر خطوط AB و CD مماس باشد، ثابت کنید چهارضلعی $AFXC$ محاطی است.

راه حل.

دایره محیطی مثلث DXF را Γ و عمودمنصف FX را ℓ می‌نامیم. دقت کنید که خطوط AB و CD مماس مشترک‌های خارجی دایره Γ و ω هستند، پس نسبت به ℓ قرینه یکدیگرند. فرض کنید Y در AB بر Γ مماس باشد و Z قرینه A نسبت به ℓ باشد. اگر خط FD را نسبت به ℓ قرینه کنیم به خط XY تبدیل می‌شود پس از آنجا که FD از A می‌گذرد، XY نیز از Z می‌گذرد.



واضح است که چهارضلعی $AFXZ$ دوزنقه متساوی‌الساقین است پس چهار نقطه A, F, X, Z روی یک دایره قرار دارند و اگر نشان دهیم دایره محیطی مثلث FXZ از C می‌گذرد حکم ثابت می‌شود. دقت کنید که

$$\angle BEF = \angle FXE = \frac{\widehat{FXD}}{2} = \angle FDC$$

پس چهارضلعی $FECD$ محاطی است. در نتیجه

$$\angle FCZ = \angle FCD = \angle FED = \angle FEX = \angle FXY = 180^\circ - \angle FXZ$$

که محاطی بودن چهارضلعی $FXZC$ را نشان می‌دهد و حکم نتیجه می‌شود.

۴. n نقطه روی محیط دایره‌ی ω قرار دارند. می‌دانیم دایره‌ای با شعاع کمتر از ω وجود دارد که همه‌ی n نقطه داخل یا روی آن باشند. ثابت کنید قطری از ω وجود دارد که دو سر آن جزء نقاط نباشند و همه‌ی نقاط در یک سمت آن قرار گیرند.

راه حل.

فرض کنید O مرکز ω و O' مرکز دایره‌ی با شعاع کمتر باشد. از O خطی عمود بر OO' رسم می‌کنیم تا ω را در A و B قطع کند. نشان می‌دهیم AB قطر مورد نظر است. فرض کنید نقطه‌ی P طرف دیگر AB نسبت به O' یا روی آن قرار داشته باشد. واضح است که $\angle POO' \geq 90^\circ$ در نتیجه $PO' > PO$. پس P نمی‌تواند یکی از n نقطه باشد زیرا فاصله‌ی هر یک از این نقاط از O' کمتر از فاصله‌ی آن از O است. این نتیجه می‌دهد همه‌ی نقاط همان طرف AB قرار دارند که O' قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

۵. ۱۴۰۰ عدد حقیقی داده شده‌اند. ثابت کنید حداقل سه تا از این اعداد مانند x ، y و z وجود دارند که

$$\left| \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^4 + y^4 + z^4 + 1} \right| < \frac{9}{1000}$$

راه حل.

قرار دهید $c = \frac{9}{1000}$ و $n = 1400$. فرض خلف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم برای هر سه عدد x ، y و z که $z \geq y \geq x$ داشته باشیم

$$(z-y)(y-x)(z-x) \geq c(x^4 + y^4 + z^4 + 1). \quad (1)$$

دقت کنید که برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $(a+b)^2 \geq 4ab$ ، زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^2 \geq 0$ که درستی آن واضح است. حال با استفاده از این نامساوی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} (z-x)^2 &\geq 4(z-y)(y-x) \implies (z-x)^3 \geq 4(z-y)(y-x)(z-x) \\ &\stackrel{(1)}{\geq} 4c(x^4 + y^4 + z^4 + 1) \\ &\geq 4c(x^4 + z^4 + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

توجه کنید که نامساوی آخر نتیجه می‌دهد

$$z-x \geq \sqrt[3]{4c} \quad (3)$$

همچنین از طرف دیگر طبق (۲) می‌توان نوشت

$$\frac{(z-x)^3}{x^4 + z^4} > 4c \quad (4)$$

دقت کنید که $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ زیرا این نامساوی معادل است با $(a-b)^2 \geq 0$. با دو بار استفاده از این نامساوی نتیجه می‌شود

$$(z-x)^4 \leq 4(x^2 + z^2)^2 \leq 8(x^4 + z^4) \stackrel{(4)}{\implies} \frac{8}{z-x} > 4c \implies z-x < \frac{2}{c} \quad (5)$$

حال فرض کنید اعداد داده شده $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ باشند. از (۳) نتیجه می‌شود $x_{k+2} - x_k > \sqrt[3]{4c}$ در نتیجه

$$\frac{2}{c} > x_n - x_1 > \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \sqrt[3]{4c} \implies c < \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor^{\frac{3}{4}}} \approx \frac{87}{10000}$$

که تناقض است. پس فرض اولیه غلط بوده و حکم ثابت می‌شود.

۶. آیا چینی از ۱۴۰۰ عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) دور دایره وجود دارد به طوری که حداقل یکی از اعداد ۲۰۲۱ باشد و هر عدد برابر با مجموع ب.م.م دو عدد بعدی و ب.م.م دو عدد قبلی خود باشد؟ برای مثال اگر a, b, c, d, e پنج عدد متوالی دور دایره باشند باید داشته باشیم $c = (a, b) + (d, e)$.

راه حل.

فرض کنید ب.م.م همه اعداد دور دایره برابر با k باشد. در این صورت اگر همه اعداد را بر k تقسیم کنیم چینی جدید نیز خواص مسئله را دارد و تنها تفاوت آن این است که حداقل یکی از اعداد برابر با یکی از مقسوم علیه‌های ۲۰۲۱ است. پس فرض می‌کنیم ب.م.م اعداد دور دایره برابر با ۱ است.

لم ۱. ب.م.م هر سه عدد متوالی برابر با ۱ است.

برهان. فرض کنید a, b, c, d, e پنج عدد متوالی دور دایره باشند و سه عدد a, b, c عامل مشترک p را داشته باشند. از تساوی $c = (a, b) + (d, e)$ نتیجه می‌شود d و e نیز بر p بخش پذیرند و به همین ترتیب همه اعداد دور دایره بر p بخش پذیر می‌شوند، پس p باید برابر با ۱ باشد و این یعنی ب.م.م هر سه عدد متوالی ۱ است. \square

لم ۲. اگر a, b و c سه عدد متوالی دور دایره باشند آنگاه $c > (a, b)$.

برهان. از شرط مسئله و این که ب.م.م همواره عددی مثبت است حکم نتیجه می‌شود. \square

فرض کنید m عدد بیشینه بین تمام اعداد دور دایره باشد و x, y, z, t به همین ترتیب دور دایره قرار داشته باشند. از آنجا که مجموع دو عدد طبیعی حداقل ۲ است، ۱ نمی‌تواند در بین اعداد دور دایره ظاهر شود. همچنین $m > 4$ است زیرا ۲۰۲۱ بر هیچ یک از اعداد ۲، ۳ و ۴ بخش پذیر نیست. طبق تساوی $m = (x, y) + (z, t)$ یکی از اعداد (x, y) و (z, t) باید حداقل $\frac{m}{2}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $(x, y) \geq \frac{m}{2}$. اگر $x \neq y$ آنگاه یکی از دو عدد حداقل m است و از آنجا که m عدد بیشینه بود باید برابر با m باشد. طبق لم ۲، y نمی‌تواند برابر با m باشد پس باید داشته باشیم $y = \frac{m}{2}$ و $x = m$. این نیز نتیجه می‌دهد $(z, t) = \frac{m}{2}$. مشابه قبل z نمی‌تواند برابر با m باشد پس $z = \frac{m}{2}$. اما از آنجا که y, m و z متوالی هستند طبق لم ۲ به تناقض می‌رسیم. پس فرض $x \neq y$ باطل می‌شود و باید داشته باشیم $x = y \geq \frac{m}{2}$. حال فرض کنید عدد قبل از x, w باشد. از لم ۱ نتیجه می‌شود $(w, x) = 1$ پس می‌توان نوشت

$$x = (w, x) + (m, z) = 1 + (m, z) \implies x - 1 \mid m$$

اگر m فرد باشد، از آنجا که $\frac{m+1}{2} \leq x \leq m$ باید داشته باشیم $\frac{m-1}{2} \leq \frac{m}{2}$ که نتیجه می‌دهد $m \leq 3$ و این با فرض $m > 4$ در تناقض است. پس m باید زوج باشد و از آنجا که $\frac{m}{2} \leq x \leq m$ تنها حالت ممکن $x = \frac{m}{2} + 1$ است. پس $(m, z) = \frac{m}{2}$ که نتیجه می‌دهد $z = \frac{m}{2}$. از طرف دیگر داریم

$$m = (x, x) + (z, t) = \frac{m}{2} + 1 + \left(\frac{m}{2}, t\right) \implies \frac{m}{2} - 1 \mid \frac{m}{2} \implies \frac{m}{2} - 1 \mid 1 \implies m = 4$$

که این نیز با فرض $m > 4$ در تناقض است. پس چنین چینی وجود ندارد.